Chapitre 4 : Matrices et systèmes linéaires

Dans tout le chapitre, "le corps des scalaires" K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n, p, q, r sont des entiers ≥ 1

1 Matrices

1.1 Ensemble $M_{np}(K)$

Définition 1.1. Une matrice $n \times p$ (ou : à n lignes et p colonnes) à coefficients dans K est un tableau

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \text{ de taille}$$

de taille $n \times p$ dont les coefficients (ou : éléments) $a_{11}, \dots, a_{np}$ appartiennent à K
On note $M_{np}(K)$ l'ensemble de ces matrices.

Définition 1.2. Soit $A \in M_{np}(K)$
On définit :

- $*$ Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, sa i-ème ligne :

$$L_i(A) = \begin{pmatrix} [A]_{i1} & [A]_{i2} & \cdots & [A]_{ip} \end{pmatrix} \in M_{ip}(K)$$

- $*$ Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, sa j-ème colonne :

$$C_j(A) = \begin{pmatrix} [A]_{1j} \\ [A]_{2j} \\ \vdots \\ [A]_{nj} \end{pmatrix}$$

1.2 Somme et produit

Définition 1.3. Soit $A, B \in M_{np}(K)$
On définit la somme coefficient par coefficient, càd :

$$A + B = \Big([A]_{ij} + [B]_{ij}\Big)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

La somme hérite des propriétés de la somme dans K

Proposition 1.4.

- $*$ L'addition est associative : $\forall A, B, C \in M_{np}(K)$, $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $*$ L'addition est commutative : $\forall A, B \in M_{np}(K)$, $A + B = B + A$

Définition 1.5. Soit $A \in M_{np}(K)$ et $B \in M_{pq}(K)$
Le produit $AB \in M_{np}(K)$ est défini par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, q]\!],\ [AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{ik}[B]_{kj}$$

Proposition 1.6. Soit $A, A' \in M_{np}(K)$, $B, B' \in M_{pq}(K)$, $C \in M_{qr}(K)$ et $\lambda \in K$ On a :
- $(A + A')B = AB + A'B$
- $(\lambda A) = \lambda AB$
- $A(B + B') = AB + AB'$
- $A(\lambda B) = \lambda(AB)$
- $A(BC) = (AB)C$

Le produit matriciel est bilinéaire est associative.

Remarque capitale :
- Le produit n'est pas commutatif.
- Il y a des diviseurs de 0 : on peut obtenir 0 en multipliant deux matrices non nulles.

1.3 Transposée

Définition 1.7. Soit $A \in M_{np}(K)$
On définit sa transposée $A^T \in M_{pn}(K)$ par :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![1, n]\!], [A^T]_{ij} = [A]_{ji}$$

Proposition 1.8. Soit $A \in M_{np}(K)$ et $B \in M_{pq}(K)$
Alors $(AB)^T = B^T A^T$

1.4 Matrices élémentaires

Définition 1.9. On appelle matrice élémentaire et on note $E_{ij}^{(n,p)}$ ou E_{ij} si le contexte est claire la matrice $n \times p$ dont l'unique coefficient non nul est en position (i, j) et vaut 1

Proposition 1.10. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ et $(k, l) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!]$
Alors $E_{ij}^{(n,p)} E_{kl}^{(p,q)} = \begin{cases} E_{il}^{(n,p)} \text{ si } j = k \\ 0_{n \times q} \text{ si } j \neq k \end{cases} = \mathbb{1}_{(j=k)} E_{il}^{(n,q)} = \delta_{jk} E_{il}^{(n,q)}$
où $\delta_{jk} = \mathbb{1}_{(j=k)} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ s'appelle "le symbole delta de Kronecker".

2 Matrices carrée

2.1 Généralités

Définition 2.1. Une matrice carrée d'ordre n est une matrice de taille $n \times n$
On note $M_n(K) = M_{nn}(K)$ l'ensemble de ces matrices.

Définition 2.2. On dit que $A, B \in M_n(K)$ commutent si $AB = BA$

Définition 2.3.
- On appelle matrice identité (d'ordre n) la matrice

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

- On appelle matrice scalaire toute matrice de la forme λI_n, où $\lambda \in K$

Proposition 2.4. Soit $A \in M_{np}(K)$
On a : $AI_p = I_n A = A$ et $A(\lambda I_p) = (\lambda I_n)A = \lambda A$
En particulier, les matrices scalaires commutent à toutes les matrices carrées.

2.2 Matrices inversibles

Définition 2.5. Soit $A \in M_n(K)$
* On dit que A est inversible s'il existe $B \in M_n(K)$ tel que $AB = BA = I_n$
* Une telle matrice B, si elle existe, est unique : on l'appelle l'inverse de A et on la note A^{-1}
* L'ensemble des matrices $n \times n$ inversibles est appelé groupe (général) linéaire d'ordre n et est noté $GL_n(K)$

Proposition 2.6.
* Soit $A, B \in GL_n(K)$
  Alors $AB \in GL_n(K)$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (stabilité par produit)
* Soit $A \in GL_n(K)$
  Alors $A^{-1} \in GL_n(K)$ et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

Proposition 2.7 (Simplifiabilité / régularité des matrices inversibles)**.** Soit $A \in GL_n(K)$
* On a $\forall B, C \in M_{np}(K)$, $AB = AC \implies B = C$
* On a $\forall B, C \in M_{pn}(K)$, $BA = CA \implies B = C$

Remarque : En général, si A n'est pas inversible, l'égalité $AB = AC$ n'entraine pas $B = C$

2.3 Puissances

Définition 2.8. Soit $A \in M_n(K)$
* Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit $A^k = AA...A$ (k facteurs)
  En particulier, $A^0 = I_n$ et $A^1 = A$
* Si A est inversible, on étend la définition aux exposants négatifs : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $A^k = \begin{cases} A...A \text{ si } k \geq 0 \\ A^{-1}...A^{-1} \text{ si } k \leq 0 \end{cases}$

Proposition 2.9. Soit $A \in M_n(K)$
On a $\forall k, l \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} A^{k+l} = A^k A^l \\ A^{kl} = \left(A^k\right)^l \end{cases}$
L'énoncé se généralise aux exposants négatifs si A est inversible.

Remarque : En revanche, $(AB)^k$ n'est en général pas égal à $A^k B^k$
Par contre, cela devient vrai si A et B commutent.

Théorème 2.10. Soit $A, B \in M_n(K)$ tels que $AB = BA$
Alors
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ A^n - B^n = (A-B)\sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{n-1-k}$$

Proposition 2.11. Soit $A \in M_n(K)$
Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $(A^n)^T = \left(A^T\right)^n$
Cette formule s'étend aux exposants négatifs si $A \in GL_n(K)$

2.4 Trace

Définition 2.12. Soit $A \in M_n(K)$
On définit sa trace :
$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} [A]_{kk}$$

Proposition 2.13.

* Linéarité de la trace :
  $\forall A, B \in M_n(K), \operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$
  $\forall \lambda \in K, \forall A \in M_n(K), \operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A)$
* Cyclicité de la trace :
  $\forall A, B \in M_n(K), \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

2.5 Parties remarquables de $M_n(K)$

Définition 2.14. Soit $A \in M_n(K)$

* On dit que A est diagonale si $\forall i, j \in [\![1, n]\!], i \neq j \implies [A]_{ij} = 0$
  Dans ce cas, on note $A = \operatorname{diag}([A]_{11}\ [A]_{22} \dots [A]_{nn})$
* On dit que A est triangulaire supérieure si $\forall i, j \in [\![1, n]\!], i > j \implies [A]_{ij} = 0$
* On dit que A est triangulaire inférieure si $\forall i, j \in [\![1, n]\!], i < j \implies [A]_{ij} = 0$
  On note $T_n^+(K)$ (resp. $T_n^-(K)$) l'ensemble de ces matrices.

Théorème 2.15. Ces trois ensembles sont stables par somme et par produit.
On a $\forall A, B \in D_n(K) : \begin{cases} A + B \in D_n(K) \\ AB \in D_n(K) \end{cases}$ et idem pour $T_n^{\pm}(K)$
En outre, les coefficients diagonaux du produit quand $A, B \in D_n(K)$ (ou $T_n^+(K)$ ou $T_n^-(K)$) sont les produits des coefficients diagonaux de A et B

Proposition 2.16. Soit $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in D_n(K)$
Alors A est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, càd ssi $\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i \neq 0$
Si c'est la cas, $A^{-1} = \operatorname{diag}(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n})$

Définition 2.17. Soit $A \in M_n(K)$

* On dit que A est symétrique si $A = A^T$
  On note $S_n(K)$ l'ensemble des matrices symétriques.
* On dit que A est antisymétrique si $A^T = -A$
  On note $A_n(K)$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Proposition 2.18. $S_n(K)$ et $A_n(K)$ sont stables par somme.

3 Matrices et systèmes linéaires

3.1 Définition et formulations équivalentes

Définition 3.1. Un système d'équations linéaires à n équations et p inconnues est un système de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

La matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ est la matrice du système.

Le vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^p$ est l'inconnu et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n$ est le second membre du système.
Avec ces notations, le système se réécrit $AX = B$

Définition 3.2.
- $*$ Un système linéaire est homogène si son second membre est nul.
- $*$ Le système linéaire homogène associé à $AX = B$ est le système $AX = 0$

Définition 3.3. Soit $A \in M_{np}(K)$
Le noyau de A est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène de matrice A,
càd $\ker A = \{X \in K^p \mid AX = 0_{K^n}\}$

Définition 3.4. Un système linéaire est dit compatible s'il possède des solutions.

3.2 Principe de superposition

Proposition 3.5. Soit $A \in M_{np}(K)$
- $*$ Si X_1 et $X_2 \in K^p$ sont solutions de $AX = 0$ alors $X_1 + X_2$ l'est aussi.
- $*$ Si $X_1 \in K^p$ est solution de $AX = 0$ et $\lambda \in K$, alors λX est aussi solution.

Corollaire 3.6. $\ker A$ est stable par combinaison linéaire :
Pour tous $X_1, ..., X_r \in \ker A$ et tous $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K$ on a $\lambda_1 X_1 + ... + \lambda_r X_r \in \ker A$

Proposition 3.7. Soit $A \in M_{np}(K)$ et $B \in K^n$
Supposons le système $AX = B$ compatible, de telle sorte qu'il admette une solution (particulière) X_0
Alors l'ensemble des solutions de $AX = B$ est $\{X_0 + X_n \mid X_n \in \ker A\}$

Corollaire 3.8. Un système linéaire possède zéro, une ou infinité de solutions.

3.3 Opérations élémentaires

Lemme 3.9 (Lemme fondamental)**.** Soit $A \in M_{np}(K)$ et $B \in K^n$. Soit $U \in GL_n(K)$
Alors, $\forall X \in K^p$, $AX = B \iff UAX = UB$
On dit que les systèmes $AX = B$ et $UAX = UB$ sont équivalentes.

3.3.1 Première opération : l'échange

Définition 3.10. Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$ différents.
On définit la matrice d'échange

$$P_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$$

I_n, après l'échange des lignes i et j

Proposition 3.11. Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$ différents.
- $*$ On a $P_{i,j} \in GL_n(K)$
- $*$ Multiplier à gauche $A \in M_{np}(K)$ par P_{ij} a pour effet d'échanger $L_i(A)$ et $L_j(A)$
  On dit qu'on effectue $[L_i \leftrightarrow L_j]$ sur A

3.3.2 Deuxième opération : la dilatation

Définition 3.12. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $\lambda \in K^*$
On définit la matrice de dilatation

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$$

Proposition 3.13.

* $D_i(\lambda) \in GL_n(K)$
* Multiplier A à gauche par $D_i(\lambda)$ a pour effet de remplacer $L_i(A)$ par $\lambda L_i(A)$
  On note cette opération $[L_i \leftarrow \lambda L_i]$

3.3.3 Troisième opération : la transvection

Définition 3.14. Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$ différents et $\lambda \in K$
On définit la matrice de transvection

$$T_{i,j}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & \lambda & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + \lambda E_{ij}$$

Proposition 3.15.

* $T_{ij}(\lambda) \in GL_n(K)$
* Multiplier A à gauche par $T_{ij}(\lambda)$ a pour effet de remplacer $L_i(A)$ par $L_i(A) + \lambda L_j(a)$
  On dit qu'on effectue l'opération $\left[L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j\right]$

4 Pivot de Gauss

Définition 4.1. Soit $A \in M_{np}(K)$

* On appelle pivot d'une ligne de A le premier coefficient non nul de la ligne, s'il existe.
* On dit qu'une matrice est échelonnée si :
  — Si une ligne de A est nulle, les suivantes le sont aussi.
  — Le pivot d'une ligne non nulle est strictement plus à gauche que le pivot des suivantes.
* Une matrice échelonnée est dite réduite si :
  — Tous ses pivots valent 1
  — Chaque pivot est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Théorème 4.2. Soit $A \in M_{np}(K)$
Il existe une suite d'opérations élémentaires transformant A en une matrice échelonnée réduite.

Remarque : La matrice échelonnée réduite du théorème est en faite unique.
Expliquons l'algorithme (du pivot de Gauss) qui transforme effectivement A en une matrice échelonnée réduite.
On parcourt la matrice A colonne par colonne :

- ∗ S'il n'y a aucun coefficient non nul sur une ligne non encore utilisée, on passe à la colonne suivante.
- ∗ S'il y a un coefficient non nul sur une ligne non encore utilisée :
  - — On en choisit un.
  - — On le ramène (par un échange, s'il y a besoin) tout en haut des lignes non encore utilisés.
  - — On le ramène (par une dilatation) à 1.
  - — Par des transvections, on rend nuls tous les autres coefficients de la colonne.
  - — On décrète utilisée la ligne.

Définition 4.3. Dans un système linéaire dont la matrice est échelonnée réduite :

- ∗ Les équations $0 = ...$ correspondant aux lignes nulles de la matrice s'appellent les équations de compatibilité
- ∗ Les inconnus correspondant aux colonnes comportant un pivot sont dites principales et les autres secondaires

Pour résoudre un tel système :

- ∗ Si toutes les équations de compatibilité sont $0 = 0$, le système est compatible et on obtient l'ensemble des solutions par paramétrage, en utilisant les inconnues secondaires comme paramètre.
- ∗ Si au moins une des équations de compatibilité est $0 = a$ le système est incompatible : l'ensemble des solutions est vide.

5 Conséquences sur l'inversibilité

5.1 Critère "nucléaire" d'inversibilité

Théorème 5.1. Soit $A \in M_n(K)$
Alors A est inversible si et seulement si $\ker A = \{0\}$

Lemme 5.2. Soit $S \in M_n(K)$ une matrice échelonnée réduite et telle que $\ker S = \{0\}$
Alors $S = I_n$

5.2 Inversibilité à gauche et à droite

Théorème 5.3. Soit $A \in M_n(K)$
LASSÉ :

(i) A est inversible.

(ii) A est inversible à gauche : $\exists B \in M_n(K) : BA = I_n$

(iii) A est inversible à droite : $\exists B \in M_n(K) : AB = I_n$

En outre, si $B \in M_n(K)$ vérifie $AB = I_n$ ou $BA = I_n$, alors B est l'inverse de A.

5.3 Systèmes de Cramer et première méthode de calcul de l'inverse

Théorème 5.4. Soit $A \in M_n(K)$
LASSÉ :

(i) $A \in GL_n(K)$

(ii) Quelque soit $B \in K^n$, le système $AX = B$ a une unique solution

En outre, si $A \in GL_n(K)$, l'unique solution de $AX = B$ est $X = A^{-1}B$

5.4 Génération de $GL_n(K)$

Théorème 5.5. Soit $A \in GL_n(K)$
Alors il existe une liste de matrices d'opérations élémentaires $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ telles que $A = \Omega_m \dots \Omega_1$
On dit que les matrices d'opérations élémentaires engendrent $GL_n(K)$

Lemme 5.6. Soit $S \in M_n(K)$ une matrice échelonnée réduite inversible.
Alors $S = I_n$

5.5 Calcul de l'inverse par les opérations élémentaires

Exemple : On échelonne :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad [L_2 \leftarrow L_2 - L_1] \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2] \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [L_1 \leftarrow L_1 - L_2]
\end{aligned}$$

Matriciellement : $I_2 = T_{12}(-1)D_2(-\frac{1}{2})T_{21}(-1)I_2$
On en déduit que A est inversible, d'inverse $A^{-1} = T_{12}(-1)D_2(-\frac{1}{2})T_{21}(-1)$

En pratique, on présente le calcul avec des "bimatrices"

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) &\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad [L_2 \leftarrow L_2 - L_1] \\
&\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \quad [L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2] \\
&\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \quad [L_1 \leftarrow L_1 - L_2]
\end{aligned}$$

Donc A est inversible, d'inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

6 Réduction des matrices 2×2

6.1 Déterminant

Définition 6.1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$
On définit son déterminant

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Théorème 6.2.

* Le déterminant est multiplicatif :
  $\forall A, B \in M_2(K), \det(AB) = \det(A)\det(B)$
* Pour tout $A \in M_2(K)$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a :
  — $A \in GL_n(K)$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$
  — Si $\det(A) \neq 0$, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

6.2 Valeurs propres, vecteurs propres

Définition 6.3. Soit $A \in M_2(K)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K^2$ et $\lambda \in K$

On dit que X est un vecteur propre pour A associé à la valeur propre λ si $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $AX = \lambda X$

On définit le spectre de A comme l'ensemble $S_{p_K}(A)$ des valeurs propres de A

Définition 6.4. Soit $A \in M_2(K)$
On définit le polynôme caractéristique de A :

$$\mathcal{X}_A = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A)$$

Proposition 6.5. Soit $A \in M_2(K)$ et $\lambda \in K$
Alors λ est une valeur propre de A ssi λ est racine de $\mathcal{X}_A$

Proposition 6.6 (Non-colinéarité des vecteurs propres)**.** Soit $A \in M_2(K)$ et $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs propres de A associés à des valeurs propres $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Alors $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$

6.3 Similitude

Définition 6.7. Soit $A, B \in M_2(K)$
On dit que A et B sont semblables et on note $A \sim B$ si $\exists P \in GL_2(K) : B = P^{-1}AP$

Proposition 6.8. $\sim$ est une relation d'équivalence. Elle est :
Réflexive : $\forall A \in M_2(K), A \sim A$
Symétrique : $\forall A, B \in M_2(K), A \sim B \implies B \sim A$
Transitive : $\forall A, B, C \in M_2(K), (A \sim B \text{ et } B \sim C) \implies A \sim C$

Proposition 6.9. Deux matrices de $M_2(K)$ semblables ont la même trace, même déterminant, même polynôme caractéristique et même spectre.

Définition 6.10. Une matrice de $M_2(K)$ est dite :

* diagonalisable : si elle est semblable à une matrice diagonale.
* trigonalisable : si elle est semblable à une matrice triangulaire.

6.4 Théorème de classification

Théorème 6.11. Soit $A \in M_2(K)$

* Si A possède deux valeurs propres $\lambda_0 \neq \lambda_1 \in K$, alors $A \sim \mathrm{diag}(\lambda_0, \lambda_1)$
  (On dit que A est diagonalisable à spectre simple)
* Si A possède une valeur propre double $\lambda \in K$, alors :
  — Ou bien $A = \lambda I_2$
  — Ou bien $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ("bloc de Jordan")
* Si $K = \mathbb{R}$ et que A possède deux valeurs propres conjuguées $a \pm ib$ (où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$), alors
  $A \sim \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Lemme 6.12 ("de descente" pour la similitude)**.** Soit $A, B \in M_2(\mathbb{R})$
Si $A \underset{\mathbb{C}}{\sim} B$, alors $A \underset{\mathbb{R}}{\sim} B$

7 Suites récurrentes linéaires

7.1 Suites arithmético-géométriques

Définition 7.1. Une suite arithmético-géométrique est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans K telle qu'il existe $\alpha, \beta \in K$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$$

Proposition 7.2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$, où $\alpha, \beta \in K$ et $\alpha \neq 1$
Alors $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \alpha^n \left(u_0 - \frac{\beta}{1-\alpha} \right) + \frac{\beta}{1-\alpha}$$

7.2 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2

Dans cette section, on fixe $\alpha, \beta \in K$ et on considère les suites récurrentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} + \alpha u_{n+1} + \beta u_n = 0 \quad \text{(RR)}$$

Cela se réécrit matriciellement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}$
Son polynôme caractéristique $\mathcal{X}_A = X^2 + \alpha X + \beta$ est appelé polynôme caractéristique de (RR)
On va réduire A, càd trouver :

* Une matrice "simple" $S \in M_2(K)$
* Une matrice $P \in GL_2(K)$

telles que $A = PSP^{-1}$
On aura alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

En notant

$$S^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

On obtient

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

donc

$$u_n = rva_n + rwb_n + svc_n + swd_n$$

Autrement dit, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une combinaison linéaire de quatre suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Théorème 7.3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ vérifiant (RR)
Notons $\mathcal{X} = X^2 + \alpha X + \beta$

* si $\mathcal{X}$ a deux racines simples $\lambda_0, \lambda_1 \in K$, alors il existent $a, b \in K$ tels que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a\lambda_0^n + b\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$
* Si $\mathcal{X}$ a une racine double $\lambda \in K^*$, alors il existent $a, b \in K$ tels que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a\lambda^n + bn\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$
* Si $K = \mathbb{R}$ et que $\mathcal{X}$ a deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ (ou $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]0, \pi[$) alors il existent $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (ar^n \cos(n\theta) + br^n \sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$